Ein klassisches Teilchenmodell mit variablem Gravitationskoeffizienten

Von Jochen Lindner

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Mainz

(Z. Naturforschg. **17 a**, 554—558 [1962]; eingegangen am 2. Mai 1962)

The unified theory of gravitation and the electromagnetic field in the form suggested by Bechert[1] has solutions which correspond to the model of a classical particle of mass M_0 and charge Q. We shall assume that the coefficient of gravitation $\varkappa$ is not a constant but a field function. The equation of motion is derived for this case. It shows that a suitable choice of the field function $\varkappa$ leads to a correct Coulomb field as well as to a correct gravitational field (corresponding to Q and M_0) in great distance from the particle. The extension of the particle is characterized by the classical radius $L=Q^2/M_0\,c^2$ of the particle, it holds together by the balance between Coulomb force and gravitation. The specific charge turns out to be a typical function of the distance from the center of the particle.

Die in zwei früheren Arbeiten[2] veröffentlichten Lösungen der nichtlinearen Theorie der Gravitation und des elektromagnetischen Feldes, wie sie von Bechert[1] vorgeschlagen wurde, ergeben u. a. das Modell einer Coulombschen Ladung, die in größerer Entfernung vom Teilchen das richtige Coulomb-Feld erzeugt. Ein Mangel der betrachteten Lösung besteht jedoch in folgendem: die streng gültige Bewegungsgleichung[3] der Theorie ergibt für das statische Teilchenmodell das Gleichgewicht zwischen zwei Kräften, von denen man die eine in größerer Entfernung vom Teilchen als Coulomb-Kraft erkennt, d. h. als Produkt aus Ladung in einem Volumenelement $d\tau_3$ und elektrischer Feldstärke. Die zweite Kraft ist das Produkt aus Masse in $d\tau_3$ und einer Feldstärke, die für ein geladenes Elementarteilchen um das rund 10^{+40}-fache größer ist als es die Gravitationsfeldstärke sein müßte, die von der Teilchenmasse erzeugt wird, sie kann daher nichts mit der Schwerkraft zu tun haben. Ein klassisches Teilchen ohne Spin, das nur Ladung und Ruhmasse besitzen soll, erzeugt aber außer der elektrischen Feldstärke keine andere, die von gleicher Größenordnung ist und in entgegengesetzter Richtung wirkt. Die Gravitationswirkungen sind um viele Zehnerpotenzen kleiner, und eine dritte Kraft von der behaupteten Größenordnung gibt es erfahrungsgemäß nicht.

Wir fragen, ob es sich durch einfache Erweiterungen der angegebenen Lösung erreichen läßt, auch das richtige der Ruhmasse M_0 entsprechende Newtonsche Potential in größerer Entfernung vom Teilchen zu bekommen. Das ist in der Tat möglich durch die Annahme bei im übrigen unveränderter Lösung, daß der Kopplungsparameter $\varkappa$ zwischen Einstein- und Materietensor [s. Gl. (1) des § 1] keine Konstante ist, sondern eine Feldfunktion. Die Newtonsche Näherung der Gravitationstheorie mit

$$\varkappa=\text{const}=\varkappa_\infty$$

zeigt die Proportionalität zwischen $\varkappa$ und der Gravitationskonstanten G: $\varkappa=\varkappa_\infty=8\,\pi\,G/c^4$. Unsere Annahme eines variablen Gravitationskoeffizienten $\varkappa=\varkappa(x_i)$ bei unveränderten Grundgleichungen der Theorie hat zur Folge, daß für unsere Lösung $\varkappa$ den Einsteinschen Wert $\varkappa_\infty$ nur in großer Entfernung vom Teilchen hat, im Inneren ist $\varkappa$ kleiner. Der Einfluß eines Gravitationskoeffizienten $\varkappa$, der keine räumliche Konstante, sondern eine Ortsfunktion ist, scheint bisher in der Literatur nicht behandelt worden zu sein; man vergleiche jedoch die kosmologischen Studien zu einer zeitlichen Veränderung von $\varkappa$ bei Jordan[4].

§ 1. Grundlagen

Die Grundgleichungen der Theorie, zu deren Begründung und Interpretation auf die zitierten Arbeiten[1, 2] verwiesen sei, sind die Einstein-Gleichungen im Riemannschen Raum:

$$R^\mu_\nu-\tfrac{1}{2}\,g^\mu_\nu\,R=-\varkappa\,Y^\mu_\nu \qquad (1)$$

mit dem Energie-Impulstensor der Materie

$$Y^\mu_\nu=T^\mu_\nu+U\,V^\mu\,V_\nu\,, \qquad (2)$$

[1] K. Bechert, Z. Naturforschg. **11 a**, 177 [1956], Arbeit I.

[2] K. Bechert u. J. Lindner, Ann. Phys., Lpz. (7), **6**, 361 [1960], Arbeit II; J. Lindner, Z. Naturforschg. **16 a**, 346 [1961], Arbeit III.

[3] Siehe Arbeit I, Gl. (4.4).

[4] P. Jordan, Schwerkraft und Weltall, Verlag Vieweg, Braunschweig 1955, S. 222 ff.

die MAXWELLschen Gleichungen in kovarianter Formulierung [5]:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = S^\mu \equiv C\, V^\mu; \tag{3}$$

$$F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0 \tag{4}$$

und die Normierungsbedingung für die Vierergeschwindigkeit V^μ:

$$V^\mu V_\mu = 1. \tag{5}$$

$F_{\mu\nu}$ ist der schiefsymmetrische Tensor des elektromagnetischen Feldes,

$$T^\mu_\nu = F^{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} - \tfrac{1}{4} g^\mu_\nu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

der MAXWELLsche Spannungstensor, $S^\mu \equiv C\, V^\mu$ der zur Vierergeschwindigkeit proportionale Viererstrom; C ist eine mit der Ladung zusammenhängende Invariante; es ist nämlich:

$$\varrho_Q\, d\tau_3 = -i\, C\, V^4 \sqrt{g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \tag{6}$$

die im Volumenelement $d\tau_3$ enthaltene Ladung. Wegen (1), (2) und $T^\mu_\mu \equiv 0$ gilt:

$$R = \varkappa\, U. \tag{7}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir für $\varkappa$ an:

$$\varkappa = \varkappa_\infty\, e^{2\mu}; \quad \mu = \mu(x_i); \quad \varkappa_\infty = 8\,\pi\, G/c^4; \tag{8}$$

dann soll

$$\varrho_{M0}\, d\tau_3 = -\left[R\, V^4/(\varkappa_\infty c^2)\right] \sqrt{g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \tag{9}$$

die in $d\tau_3$ befindliche Ruhmasse bedeuten. Alle Formeln dieses § gelten auch für variables $\varkappa$, sie stimmen mit den entsprechenden der früheren Arbeiten II und III überein, in denen $\varkappa = \varkappa_\infty$, d. h. $\mu = 0$, angenommen worden war.

§ 2. Die Bewegungsgleichung

Die wichtigste Eigenschaft der Gl. (1) ist das identische Verschwinden der kovarianten Divergenz der linken Seite:

$$(R^\mu_\nu - \tfrac{1}{2} g^\mu_\nu R)_{;\mu} \equiv 0. \tag{10}$$

Gl. (10) trifft zu für jeden symmetrischen metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$. Es gilt daher auch für die rechte Seite der Gl. (1) ein Erhaltungssatz $(\varkappa\, Y^\mu_\nu)_{;\mu} = 0$, der ausgeführt

$$Y^\mu_{\nu;\mu} + (\lg \varkappa)_{,\mu}\, Y^\mu_\nu = 0 \tag{11}$$

heißt. Ist $\varkappa$ eine Konstante, so wird der zweite Term in (11) Null und man bekommt den Erhaltungssatz für den Materietensor Gl. (2.6) der Arbeit I. Wir leiten aus (11) die Bewegungsgleichung der Materie ab. Dazu brauchen wir die Hilfssätze:

$$T^\mu_{\nu;\mu} = -C\, F_{\lambda\alpha} V^\alpha; \quad V^\nu V_{\nu;\mu} = 0, \tag{12}$$

welche aus der Definition von T^μ_ν und den Gln. (3) bis (5) folgen. Mit Hilfe von (2) und (12) erhält man:

$$(Y^\mu_\lambda - U V^\mu V_\lambda)_{;\mu} V^\lambda = Y^\mu_{\lambda;\mu} V^\lambda - (U V^\mu)_{;\mu}$$
$$= T^\mu_{\lambda;\mu} V^\lambda = -C\, F_{\lambda\alpha} V^\alpha V^\lambda \equiv 0,$$

oder, wenn man (11) berücksichtigt:

$$(U V^\mu)_{;\mu} = Y^\mu_{\lambda;\mu} V^\lambda = -(\lg \varkappa)_{,\mu}\, Y^\mu_\lambda V^\lambda. \tag{13}$$

Aus diesem Satz kann die Erhaltung der Ruhmasse gefolgert werden, wenn $\varkappa = \text{const}$ gilt (siehe Arbeit I, § 3). Im allgemeinen aber wird die Änderung der Ruhmasse in einem Raumgebiet nicht nur durch die Massenströmung durch den Rand des Gebietes bewirkt, sondern außerdem durch ein zusätzliches Glied, das aus (9) und (13) leicht durch Integration gewonnen werden kann. Aus (11) folgt nun wegen (2) und (12):

$$-C\, F_{\nu\alpha} V^\alpha + (U V^\mu)_{;\mu} V_\nu + U\, V^\mu V_{\nu;\mu}$$
$$+ (\lg \varkappa)_{,\mu}\, Y^\mu_\nu = 0.$$

Formt man hier $(U V^\mu)_{;\mu}$ nach (13) um und verwendet wiederum (2), so ergibt sich schließlich:

$$U\, V^\mu V^\alpha{}_{;\mu} = C\, F^\alpha{}_\mu V^\mu + (\lg \varkappa)_{,\mu}\, T^\mu_\nu\, (V^\alpha V^\nu - g^{\alpha\nu});$$
$$\alpha = 1, 2, 3, 4. \tag{14}$$

Das ist die streng gültige Bewegungsgleichung der Materie. Links steht der mit U multiplizierte Differentialausdruck für die geodätischen Linien

$$V^\mu V^\alpha{}_{;\mu} = \frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds};$$

der erste Term rechts ist die LORENTZ-Kraft, der zweite hat kein klassisches Analogon; er entspricht einer durch die Veränderlichkeit von $\varkappa$ bewirkten Kraft. Nur wenn beide Kräfte null sind, bewegt sich die Materie auf geodätischen Linien.

Einen guten Einblick in die Struktur der Bewegungsgleichung gibt die NEWTONsche Näherung, d. h. schwache, zeitlich nahezu konstante Schwerefelder, $\varkappa$ weicht nur wenig vom EINSTEINschen Wert $\varkappa_\infty$ ab und die Materiegeschwindigkeit ist klein gegen die Lichtgeschwindigkeit. Wir gehen dabei im Sinne der in der Arbeit III, § 2, gegebenen Interpretation auf die meßbaren Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, die räumliche Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und die Eigenzeit τ über, deren

[5] Ein Komma bedeutet gewöhnliche, ein Strichpunkt kovariante Differentiation.

Differential $d\tau = \sqrt{g_{44}}\, dx_4/i c$ ist. Dann bekommt man aus (14) für $\alpha = 1, 2, 3$ die Vektorgleichung

$$dM_0 \frac{d\mathfrak{v}}{d\tau} = dM_0 \left[-\frac{c^2}{2} \operatorname{grad} g_{44} + \frac{c^2}{R} (\mathcal{T} \cdot \operatorname{grad} \varkappa)_a \right] + dQ \left(\mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}, \mathfrak{H} \right] \right). \quad (15)$$

$\mathcal{T}$ ist der natürliche LORENTZ-invariante Spannungstensor, der Index a am Produkt deutet an, daß nur die räumlichen Komponenten des Produkts zu nehmen sind. In (15) haben wir nun auf der linken Seite die Gesamtkraft auf das Massenelement dM_0, die rechte Seite setzt sich zusammen aus der LORENTZ-Kraft (2. Term) und einer weiteren Kraft, die offenbar der Schwerewirkung auf dM_0 entspricht. Die beiden Glieder in der eckigen Klammer des 1. Terms stellen die Gravitationsfeldstärke dar. Bei einem ruhenden Teilchen ist $\mathfrak{v} = 0$, d. h. es herrscht Gleichgewicht zwischen Schwerkraft und COULOMB-Kraft in jedem Volumenelement.

Wir weisen ausdrücklich darauf hin, daß wir es im folgenden mit strengen Lösungen zu tun haben werden, für welche die Näherungsvoraussetzungen, die zu (15) führten, i. allg. nicht zutreffen: die Schwerefelder sind stark, die Metrik ist in hohem Maße nichteuklidisch und $\varkappa$ weicht erheblich von $\varkappa_\infty$ ab in Gebieten, in denen sich das Teilchen im wesentlichen befindet. Wir haben deshalb dort die strenge Gl. (14) zu verwenden. In weit vom Teilchen entfernten Gebieten ist aber auch (15) brauchbar. Ergibt eine strenge Lösung für ein Teilchen mit der Ladung Q, der Masse M_0 und der Ausdehnung L tatsächlich richtige NEWTONsche und COULOMBsche Feldstärken $-G M_0/r^2$ und Q/r^2 für $r \gg L$, so kann man einen wichtigen Schluß ziehen; es folgt dann nämlich aus (15):

$$-(G M_0/r^2)\, dM_0 + (Q/r^2)\, dQ = 0; \quad (16)$$
$$(dQ/dM_0)_{r \gg L} = G M_0/Q = \eta (Q/M_0)$$
$$\text{mit} \quad \eta = G M_0^2/Q^2.$$

Es ist $\eta = 2{,}4 \cdot 10^{-43}$ für das Elektron, $\eta = 8{,}1 \cdot 10^{-37}$ für das Proton: die spezifische Ladung dQ/dM_0 am Rande des Teilchens beträgt nur das rund 10^{-40}-fache vom Durchschnittswert für das gesamte Teilchen Q/M_0.

§ 3. Das Teilchenmodell

Die strenge Lösung der Feldgln. (1) bis (5), welche bereits in den Arbeiten II und III hergeleitet und untersucht wurde, hat in Kugelkoordinaten r, ϑ, φ; $x_4 = i c t$ die Form der Gln. (17) bis (20). Keine Feldgröße hängt von der Zeitkoordinate x_4 und vom Azimut φ ab, ferner sollen die räumlichen Komponenten der Vierergeschwindigkeit V^μ gleich null sein: die Lösung ist statisch und rotationssymmetrisch bezüglich der ϑ-Achse. Das Linienelement im RIEMANNschen Raum ist:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = e^{2\lambda - 2\nu} (dr^2 + r^2\, d\vartheta^2) + e^{-2\nu} r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 + e^{2\nu}\, dx_4{}^2; \quad (17)$$
$$\nu = L/r; \quad \lambda = -(1-\eta)\, L^2 \sin^2\vartheta/2\, r^2.$$

Nur die radiale elektrische Feldstärke ist von null verschieden:

$$F_{14} = -i\, \delta \sqrt{2\, \eta/\varkappa}\, (L/r^2)\, e^\nu;$$
$$\delta^2 = 1; \quad F_{\mu\nu} = 0 \text{ sonst.} \quad (18)$$

Weiter gilt:

$$V^1 = V^2 = V^3 = 0; \quad V^4 = \varepsilon\, e^{-\nu}; \quad \varepsilon^2 = 1; \quad (19)$$
$$T_1^1 = -T_2^2 = -T_3^3 = T_4^4 = \tfrac{1}{2} F^{14} F_{14};$$
$$T_\nu^\mu = 0, \quad \text{wenn} \quad \mu \neq \nu. \quad (20)$$

L und η sind verfügbare Konstanten; L hat die Dimension einer Länge, η ist dimensionslos. Diese Lösung galt unter der Voraussetzung $\varkappa = \text{const}$; sie gilt aber auch, wenn $\varkappa$ eine Feldfunktion ist, denn $\varkappa$ tritt nur in den EINSTEIN-Gln. (1) als Kopplungsparameter auf. Allerdings liefert die einzige nicht triviale Gleichung $F_{14,\vartheta} = 0$ der MAXWELL-Gln. (4) wegen (18) eine Bedingung für $\varkappa : \varkappa_{,\vartheta} = 0$, d. h. $\varkappa = \varkappa(r)$, und wegen der Form (8) für $\varkappa$ auch $\mu = \mu(r)$. Die Randbedingung $\varkappa(r \to \infty) = \varkappa_\infty$ verlangt $\mu(r \to \infty) = 0$. Der einfachste Ansatz, der dies leistet, ist

$$\mu = A/r \quad (21)$$

mit einer Konstanten A. Wir untersuchen, was dieser Ansatz leistet, und berechnen zunächst die Ruhmassen- und Ladungsdichten nach (6) und (9) für die Lösung (17) bis (21) der Feldgln. (1) bis (5); man bekommt in CGS-Einheiten:

$$\varrho_{M0} = -[2\, \varepsilon\, \eta\, L^2/(\varkappa_\infty c^2 r^4)]\, e^{2\nu - 2\lambda}; \quad (22)$$
$$\varrho_Q = [\delta L (A + L)/r^4]\, \sqrt{\eta/(2\pi\varkappa_\infty)}\, e^{2\nu - 2\lambda - \mu}. \quad (23)$$

Ruhmasse $M_0(r)$ und Ladung $Q(r)$ innerhalb einer Kugel vom Radius r erhält man hieraus durch Multiplikation mit

$$d\tau_3 = \sqrt{g_{11}\, g_{22}\, g_{33}}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = e^{2\lambda - 3\nu}\, r^2 \sin\vartheta \cdot dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

und Integration:

$$M_0(r) = -\frac{8\pi\varepsilon\eta L^2}{\varkappa_\infty c^2}\int_0^r \frac{\exp\{-L/r\}}{r^2}\,dr$$

$$= -\frac{8\pi\varepsilon\eta L}{\varkappa_\infty c^2}\exp\{-L/r\}; \qquad (24)$$

$$Q(r) = 4\pi\delta L(A+L)\sqrt{\frac{\eta}{2\pi\varkappa_\infty}}\int_0^r \frac{\exp\{-(A+L)/r\}}{r^2}\,dr$$

$$= \delta L\sqrt{\frac{8\pi\eta}{\varkappa_\infty}}\exp\{-(A+L)/r\}. \qquad (25)$$

Die Integrale konvergieren nur für $L>0$ und $A>-L$. Die Ruhmasse muß positiv, d. h. $\varepsilon=-1$ sein. Für $r\to\infty$ ergeben sich aus (24) und (25) Gesamtruhmasse und Gesamtladung des Teilchens; man beachte Gl. (8):

$$M_0 = 8\pi\eta L/(\varkappa_\infty c^2) = c^2\eta L/G; \qquad (26)$$

$$Q = \delta L\sqrt{8\pi\eta/\varkappa_\infty} = \delta c^2 L\sqrt{\eta/G}; \quad \delta^2 = 1. \qquad (27)$$

δ gibt das Vorzeichen der Ladung an. M_0 und Q hängen nicht von A ab. Man kann deshalb (26) und (27) eindeutig nach den Konstanten L und η auflösen:

$$L = Q^2/M_0 c^2; \quad \eta = G M_0^2/Q^2. \qquad (28)$$

L ist der klassische Teilchenradius; η eine dimensionslose Zahl von der Größenordnung 10^{-40} für Elementarteilchen (vgl. § 2).

Was bedeutet die strenge Bewegungsgleichung (14) für die strenge Lösung (17) bis (21)? Sie ist als *Folge* der Feldgln. (1) bis (5) natürlich für jede ihrer Lösungen erfüllt. Man überzeugt sich zunächst leicht, daß aus (14) nur für $\alpha=1$ eine nicht triviale Aussage folgt, welche man nach einigen Umformungen und unter Berücksichtigung von (22) und (23) in die Form setzen kann:

$$\varrho_{M0}\left[-\frac{c^2(A+L)}{r^2}\,e^{\nu-\lambda-2\mu}\right] + \varrho_Q\left[\frac{\delta c^2 L}{r^2}\sqrt{\frac{\eta}{G}}\,e^{\nu-\lambda-\mu}\right] = 0. \qquad (29)$$

Diese Gleichung gilt streng, also auch dort, wo die Voraussetzungen der Newtonschen Näherung nicht zutreffen. Für $r\to\infty$ geht (29) aber in (16) über, die e-Funktionen werden 1, der Faktor von ϱ_Q ist dann, wie (27) zeigt, $Q/r^2 = E_r$, d. h. es herrscht das der Ladung Q entsprechende radial gerichtete Coulomb-Feld (praktisch bereits für $r>10\,L$). Erstaunlicherweise läßt sich hier auch erreichen, daß das Schwerefeld für $r\gg L$ den der Ruhmasse M_0 zugehörigen Newtonschen Wert $-G\,M_0/r^2$ hat, den der Faktor von ϱ_{M0} in (29) dann annimmt, wenn

$$c^2(A+L) = G\,M_0 = c^2\eta L, \quad \text{d. h.}$$

$$A = -(1-\eta)\,L \qquad (30)$$

gesetzt wird. Dabei ist (26) berücksichtigt worden. $\varkappa$ bekommt damit die Form

$$\varkappa = \varkappa_\infty e^{2\mu} = \varkappa_\infty e^{-2(1-\eta)L/r};$$

$$\mu = -(1-\eta)\,L/r. \qquad (31)$$

Der Gravitationskoeffizient ist null im Zentrum des Teilchens und nähert sich asymptotisch dem Wert $\varkappa_\infty = 8\pi G/c^4$ für $r\gg L$. $\varkappa$ kann als Funktion der $g_{\mu\nu}$ dargestellt werden; (31) und (17) zeigen, daß der Zusammenhang besteht:

$$\mu = (4/\pi)\int_0^\pi (\lambda/\nu)\,d\vartheta.$$

Die streng gültige Gleichgewichtsaussage (29) zwischen Coulomb-Kraft und Schwerkraft können wir in folgende Form setzen:

$$G_r\,dM_0 + E_r\,dQ = 0;$$

$$G_r = -(G\,M_0/r^2)\,e^{\nu-\lambda-2\mu}; \qquad (33)$$

$$E_r = (Q/r^2)\,e^{\nu-\lambda-\mu}.$$

G_r ist die zum Mittelpunkt des Teilchens gerichtete Gravitationsfeldstärke, E_r die radiale elektrische Feldstärke; beide unterscheiden sich bereits für $r>10\,L$ nur sehr wenig von den klassischen Feldern einer Punktmasse M_0 und einer Punktladung Q. Die beschriebene Lösung zeigt in sehr befriedigender Weise, daß es mit den Mitteln einer klassischen Feldtheorie möglich ist, den Zusammenhalt eines Teilchens zu verstehen, welches vorgeschriebene Ladung und Ruhmasse und die richtigen klassisch zu erwartenden Felder hat und dessen Ausdehnung vom klassischen Teilchenradius bestimmt wird. Lösungen mit $\varkappa=\text{const}$, wie sie in den Arbeiten II und III behandelt wurden, liefern nicht das richtige Schwerefeld. $\varkappa=\text{const}$ bedeutet $A=0$, dann zeigt aber unsere Gl. (29), daß $c^2L=(1/\eta)\,G\,M_0$ ist: das Schwerefeld wird um den Faktor $1/\eta=10^{40}$ zu groß für Elementarteilchen.

§ 4. Der Verlauf der spezifischen Ladung

Am Ende des § 2 hatten wir gefunden, daß die spezifische Ladung eines Raumteiles in einiger Entfernung vom Teilchen sehr viel geringer ist als der Durchschnittswert für das gesamte Teilchen, wenn die Felder für $r \gg L$ durch $G_r = -G\,M_0/r^2$ und $E_r = Q/r^2$ beschrieben werden. Das letzte trifft nach Gl. (33) für unsere Lösung zu. Auch der Verlauf der spezifischen Ladung läßt sich leicht überprüfen. Wir erhalten zunächst aus (26) und (27) die spezifische Ladung des gesamten Teilchens:

$$Q/M_0 = \delta\sqrt{G/\eta} = 5{,}3 \cdot 10^{17}\ \text{CGS} \quad \text{für das Elektron.} \tag{34}$$

Die Gravitationskonstante ist $G = 6{,}66 \cdot 10^{-8}$ CGS; daraus folgt $\eta = 2{,}4 \cdot 10^{-43}$. Die spezifische Ladung eines Volumenelements erhalten wir aus (22) und (23) mit $A = -(1-\eta)\,L$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Q/\mathrm{d}M_0 = \varrho_Q/\varrho_{M0} &= \delta\sqrt{\eta\,G}\;e^{(1-\eta)\,L/r} \\ &= \eta\,(Q/M_0)\;e^{(1-\eta)\,L/r}; \end{aligned} \tag{35}$$

sie ist im Inneren des Teilchens sehr groß ($\to \infty$ für $r \to 0$) und am Rande ($r \gg L$) um das η-fache kleiner als der Mittelwert Q/M_0 für das ganze Teilchen, wie es den Überlegungen des § 2 entspricht. Die Ladung ist im Gegensatz zur Masse auf einen gegenüber dem Teilchenradius L nahezu punktförmigen Bereich zusammengedrängt; das zeigt die Formel (25), wenn man A gemäß (30) einsetzt und den Ausdruck (27) für die Gesamtladung verwendet:

$$Q(r) = Q \cdot \exp(-\eta\,L/r). \tag{36}$$

Die gesamte Ladung ist praktisch bereits in einer Kugel enthalten, deren Radius einige Vielfache der Länge $\eta\,L$ beträgt, einer Länge also, die um das η-fache kleiner ist als der Teilchenradius L. Für die Massenverteilung ist dagegen L die charakteristische Länge, wie Gl. (24) zeigt.

Die Energiedichten sind die negativen (4,4)-Komponenten der Tensoren Y^μ_ν, T^μ_ν, $U\,V^\mu\,V_\nu$ multipliziert mit dem ortsabhängigen Teil $e^{2\mu}$ der Gravitationsinvarianten $\varkappa$; das zeigt Gl. (1). Man findet für die elektrische Energie W_{el}, die Energie des Schwerefeldes W_{grav} und die Gesamtenergie W des Teilchens:

$$\begin{aligned} W_{\text{el}} &= -\int e^{2\mu}\,T^4_4\,\mathrm{d}\tau_3 = M_0\,c^2/2; \\ W_{\text{grav}} &= -\int e^{2\mu}\,U\,V^4\,V_4\,\mathrm{d}\tau_3 = -M_0\,c^2; \\ W &= -\int e^{2\mu}\,Y^4_4\,\mathrm{d}\tau_3 = W_{\text{el}} + W_{\text{grav}} \\ &= W_{\text{grav}}/2 = -M_0\,c^2/2 = -Q^2/2\,L\,. \end{aligned} \tag{37}$$

Die Gesamtenergie ist der halben negativen Ruhenergie gleich. Gl. (37) ähnelt sehr der Energierelation zwischen der Energie der n-ten Bohrschen Bahn W_n, der kinetischen und potentiellen Energie E_{kin} und E_{pot} des H-Atoms:

$$W_n = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}/2 = -e_0{}^2/2\,r_n\,.$$

In dieser überraschenden, wenn auch formalen Analogie entspricht die elektrische Energie des Teilchens der kinetischen des H-Elektrons, die des Schwerefeldes der potentiellen Energie des H-Elektrons, die Ladung Q und der Teilchenradius L entsprechen der Elektronenladung e_0 und dem Radius r_n der n-ten Bohrschen Bahn.

Herrn Professor Bechert danke ich herzlich für zahlreiche fördernde Diskussionen, der Deutschen Forschungsgemeinschaft für finanzielle Unterstützung.